Kuyruk Teorisi(Y. L.)

3. Hafta

$M\ |M\ \ 1$ sisteminin analizi ve parametrelerin bulunması

Sistemin Tanımı.

Bu sistem üç elemanın verilmesiyle tanımlanır.

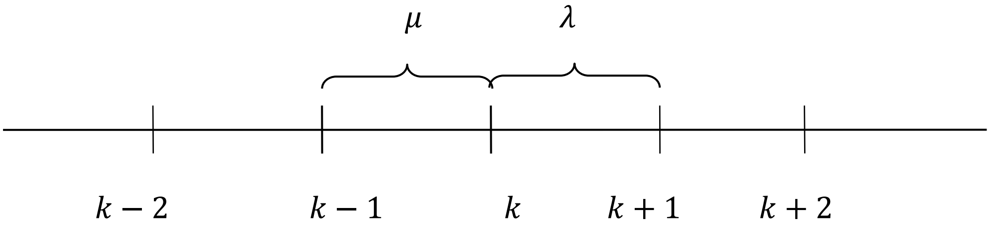
- Müşterilerin sisteme geliş anları (varış) anları, bu anlar $t_1,\ t_2, \ldots$ tesadüfi değişkenlerdir.

- Her bir müşterinin hizmet süresi γ tesadüfi değişkenidir ve bu değişken μ parametreli üstel dağılıma sahiptir.

- Hizmet sitemi bir tane hizmet verenden(kanaldan) oluşmuştur. Sistemin hizmet disiplini FIFO dur. $X(t),\ t$ anında sistemde olan müşteri sayısı olsun. O halde $\{\,X(t),\ t > 0\,\}$ ve durum uzayı $E = \{0,\ 1,\ 2, \ldots\}$ olan bir stokastik süreç olacaktır. Bu süreç $P_k(t) = P(X(t) = k)$ sistemde t anında k tane müşteri olması olasılığıdır. $P_k(t)$ olasılığını bulmak oldukça zordur. Fakat bu olasılık $t \to \infty$ için $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ koşulu altında mevcuttur.

Sisteme ait Denklemlerin Elde Edilmesi

Önce $P_k(t)$ olasılığı için diferansiyel denklem kuralım. Bunun için sistemin t ve $t + h$ anlarındaki durumlarını karşılaştıralım.



$h \to 0$ için belli bir durumda iki ve daha fazla müşteri sayısıyla farklanarak başka bir duruma geçiş olasılığı $o(h)$ dır.

$$p_{ik}(h) = o(h)\,, \qquad |i - k| \geq 2$$

$p_k(t + h)$, $t + h$ anında sistemde k tane müşteri olması olasılığı.

$\{N(t), t \geq 0\}$ t süresinde sisteme giren müşteri sayısını gösteriyor ve bu süreç Poisson sürecidir.

$\{M(t), t \geq 0\}$ t süresinde sistemden ayrılan müşteri sayısını gösteriyor ve bu süreç de Poisson sürecidir.

$$p_k(t + h) = p_k(t)P(N(t) = 0)P(M(t) = 0)$$

$$+\, p_{k-1}(t)P(N(t) = 1)P(M(t) = 0)$$

$$+ p_{k+1}(t)P(N(t) = 0)P(M(t) = 1)$$

$$+ \sum_{i=2}^{\infty} p_{k-i}(t)P(N(t) = i)P(M(t) = 0)$$

$$+ \sum_{i=2}^{\infty} p_{k+i}(t)P(N(t) = 0)P(M(t) = i)$$

$$p_k(t+h) = p_k(t)\big(1 - \lambda h + o(h)\big)\big(1 - \mu h + o(h)\big)$$

$$+ p_{k-1}(t)\left(\lambda h + o(h)\big(1 - \mu h + o(h)\big)\right)$$

$$+ p_{k+1}(t)(1 - \lambda h + o(h)\big(\mu h + o(h)\big) + o(h)$$

$h \to 0$ için

$$p'_k(t) = -(\lambda + \mu)p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + \mu p_{k+1}(t)$$

Bu denklem $k = 0$ için,

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

olur. Limit dağılımının olduğunu varsayarsak, denklem sistemine yukarıdaki varsayımlar uygulanırsa,

$$0 = -(\lambda + \mu)p_k + \lambda p_{k-1} + \mu p_{k+1}$$

$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1 \mu p_1$$

elde edilir. Bu denklem sistemi $\rho = (\lambda/\mu) < 1$ koşulu altında çözülürse,

$$p_{k+1} = \rho^{k+1} p_0 \,, \qquad k = 0, 1, \dots \text{ için}$$

elde edilir. Bu eşitliğinin her iki tarafı toplandığında $p_0 = 1 - \rho$ bulunur.Yani sistemde hiç müşteri olmaması olasılığı p_0 elde edilir. Ayrıca sistemde herhangi bir anda n- tane müşteri olması olasılığı

$$P(N = n) = p_n = \rho^n p_0 \,. \tag{23}$$

Performans Ölçüleri

1. Sistemdeki Ortalama Müşteri Sayısı

Sistemde n tane müşteri olması olasılığı $P_n = \rho^n(1-\rho)$ ‘ dur.

P_0: *Sistemde hiç müşteri olmaması olasılığı*

$$E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n\, \rho^n\, (1-\rho) = \rho\, (1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} n\, \rho^{n-1}$$

$$= \rho\, (1-\rho)\left[\frac{1}{(1-\rho)^2}\right] = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Sistemde herhangi bir anda beklenen müşteri sayısı

2. Kuyrukta bekleyen Ortalama Müşteri Sayısı

$$E(N_q) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P\big(N_q = n\big)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n\, P\,(\,N = n+1) \quad , \qquad P_n = \rho^n (1-\rho)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \; n\,\rho^{n+1} (1-\rho)$$
$$= (1-\rho)\,\rho^2 \sum_{n=0}^{\infty} n\,\rho^{n-1}$$
$$= (1-\rho)\,\rho^2 \left[\frac{1}{(1-\rho)^2}\right] = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

Ve ya

$$E(N_q) = \sum_{n=0}^{\infty} n\,P(N = n+1) \quad , \quad n+1 = k \text{ alınırsa } = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)\,P(N=k)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} k\,P(N=k) - \sum_{k=1}^{\infty} P(N=k)$$
$$= \frac{\rho}{1-\rho} - \rho$$

bulunur.

3. Bir Müşterinin Sistemde Bekleme Süresinin Ortalaması

W : Bir müşterinin sistemde bekleme süresi

W_q: Bir müşterinin kuyrukta bekleme süresi

$E(W)'$ bulabilmek için önce W' nin yoğunluk fonksiyonunu bulmalıyız. Çünkü W sürekli bir tesadüfi değişkendir. $f_w(x)$, W' nin yoğunluk fonksiyonu olsun.

$f_w(x \;/\; N = n)$. Sistemde n tane müşteri olduğu bilindiğine göre bir müşterinin bekleme süresi;

$$f_w(x \;/\; A) = \frac{f_w(x)}{P(A)}$$

$$W = Y_1' + Y_2 + \ldots + Y_n + Y_{n+1} \sim t_{n+1}$$

t_{n+1} -inci sıçrayış anlarının dağılım fonksiyonu ile W nun dağılım fonksiyonu benzerdir. Burada; $Y_1' + Y_2 + \ldots + Y_{n+1}$ farklıdır, ancak dağılımları aynıdır ve üstel dağılmış tesadüfi değişkenlerdir.

$$f_w(x \;/\; N = n) = f_{t_{n+1}}(x) = \frac{\mu(\mu x)^n}{n!}\, e^{-\mu x}$$

sistemde n tane müşterinin olduğu bilindiğine göre (n+1). müşterinin beklemesinin olasılık fonksiyonu toplam olasılık formülüne göre-

$$f_w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu(\mu x)^n . e^{-\mu x}}{n!}\, \rho^n (1-\rho)$$
$$= \mu\, e^{-\mu x}\,(1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu x)^n}{n!}\,\frac{\lambda^n}{\mu^n}$$
$$= \mu\, e^{-\mu x}\,(1-\rho) \; \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(\lambda x)^n}{n!}}_{e^{\lambda x}}$$
$$= (\,\mu - \lambda\,)\, e^{-(\mu-\lambda)x}$$

$$f_w(x) \begin{cases} (\mu - \lambda)e^{-(\mu-\lambda)x} & , x \geq 0 \\ 0 & , \ d.d. \end{cases}$$

$$P(W > x) = \int_x^{\infty} f_w(u)du = \int_x^{\infty} (\mu - \lambda)\, e^{-(\mu-\lambda)u} du = e^{-(\mu-\lambda)x}$$

$$E(W) = \int_0^{\infty} P(W > x)dx = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Bir müşterinin sistemde bekleme süresi $W = W_q + \frac{1}{\mu}$ ise , bir müşterinin kuyrukta ortalama bekleme süresi

$$E(W_q) = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu}$$